

بسمه تعالی

تاریخ امتحان: ۹۷/۱۰/۱۹	اداره آموزش و پرورش استان تهران	نام و نام خانوادگی:
مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۶	نام درس: هندسه
تعداد سوالات: ۱۳	دبیرستان نخبگان علامه طباطبائی	رشته: ریاضی
تعداد صفحات: ۲		پایه تحصیلی: دوازدهم
نیاز به ماشین حساب دارد ○ ندارد ● نیاز به پاسخ نامه دارد ● ندارد ○		شماره کلاس:

بارم	شرح سوال
۲/۵	<p>۱- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس $A \times B$ را بدست آورید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $a_{ij} \begin{cases} i^2 - 1 & ; i=j \\ i - j & ; i > j \\ j - i & ; i < j \end{cases}$ </div> <div style="text-align: center;"> $b_{ij} \begin{cases} i^2 + 1 & ; i=j \\ i + j & ; i > j \\ i - j + 2 & ; i < j \end{cases}$ </div> </div>
۱/۵	<p>۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری بدست آورید که حاصلضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.</p>
۱/۵	<p>۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^5 = kA$ باشد، آن گاه مقدار عدد k را بدست آورید.</p>
۱	<p>۴- ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.</p>
۱/۵	<p>۵- دستگاه زیر را با استفاده از روش ماتریس وارون حل نمائید.</p> $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$
۱	<p>۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان را با استفاده از روش ساروس بدست آورید.</p>
۱	<p>۷- اگر A ماتریس 3×3 باشد، و $A = 2$ باشد، در این صورت حاصل $A A$ چقدر است؟</p>
۲	<p>۸- نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید)</p>

- ۹- اگر صفحه‌ی P یک سطح استوانه‌ای را قطع نماید. در حالت‌های مختلف درباره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)
- ۱۰- به هر یک از سوالات زیر پاسخ دهید.
- الف) اگر صفحه‌ی P با مولد سطح مخروطی موازی بوده و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی چیست؟
- ب) مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند را بیابید.
- ۱۱- خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از یک دایره هستند و خط $4x + 3y = 6$ بر این دایره مماس است. معادله‌ی ضمنی دایره را بدست آورید.
- ۱۲- وضعیت دو دایره‌ی زیر نسبت به هم چگونه است؟
- ۲ $C_1: x^2 + y^2 = 1$
- $C_2: x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$
- ۱۳- در نقطه‌ی $A=(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماس بر آن رسم کرده‌ایم. معادله‌ی این خط مماس را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1/5) \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (1/5) \quad -1$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 11 & 16 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+a & \lambda-2a \\ 3b-2 & 2b+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-2a=0 \Rightarrow a=2 \\ 3b-2=0 \Rightarrow b=2/3 \end{cases} \quad (1/5) \quad -2$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3A \Rightarrow A^T = 9A^T = 9(3A) = 27A \Rightarrow A^0 = 27A^T = 81A \Rightarrow K=81 \quad (1/5) \quad -3$$

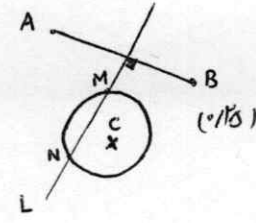
۴- اگر B و C وارون A باشند آنگاه داریم: $AB=BA=I$, $AC=CA=I$ (1/5)
 $B = B \times I = B(AC) = (BA)C = IC = C \Rightarrow B=C \Rightarrow$ وارون A منحصر به فرد است. (1/5)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1/5) \quad , \quad X = A^{-1}B \quad -5$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & 5/13 \\ -2/13 & 3/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{29}{13} \quad , \quad y = \frac{26}{13} \quad (1/5)$$

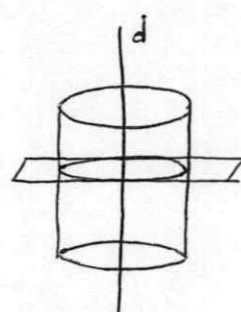
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (4-9-8) - (3-12-8) = -13+17=4 \Rightarrow |A|=4 \quad (1/5) \quad -6$$

$$|2A| = 2^3 |A| = 8 \times 4 = 32 \quad (1) \quad -7$$

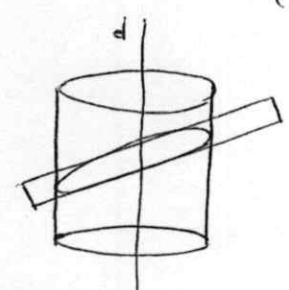


۸- نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط AB یعنی خط L قرار دارد. از طرفی نقطه‌ای که از C به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ سانتی متر قرار دارد. تقاطع کلیتاً خط L و دایره نندکند جواب مسئله اند. (تقاطع M, N) (1)

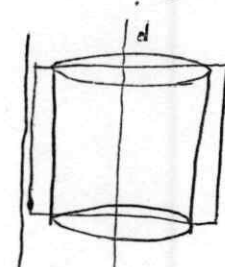
- بحث: ۱- اگر خط L و دایره همانند شکل متقابل متقاطع باشند مسأله دو جواب دارد. (1/5)
 ۲- اگر خط L و دایره برهم مناس باشند، مسأله نقطه یک جواب دارد. (1/5)
 ۳- اگر خط L دایره را قطع نکند مسأله جوابی ندارد. (1/5)



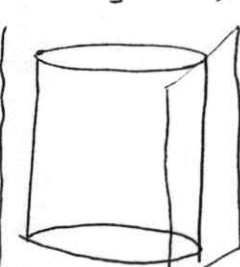
حالت ۱: اگر صفحه عمود بر محور d باشد، در این صورت دایره پدید می‌آید. (1/5)



حالت ۲: اگر صفحه عمود بر محور d نبوده و موازی با آن هم نباشد در این صورت منحنی پدید می‌آید. (1/5)

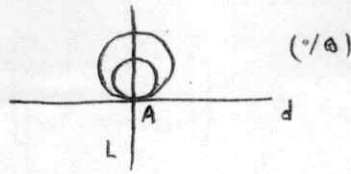


حالت ۳: اگر صفحه موازی محور d سطح استوانه‌ای را قطع نماید، دو خط موازی پدید می‌آید. (1/5)



حالت ۴: اگر صفحه بر سطح استوانه‌ای مناس باشد یک خط پدید می‌آید. (1/5)

دایره‌ای که در نقطه A بر خط L مماس اند، مطابق شکل مرکز آنها بر روی خطی عمود بر L که بر خط L در نقطه A عمود می‌باشد قرار دارند.



۱۰- الف) صحیح (۰/۵) ب) (۰/۵)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O=(2, -1) \Rightarrow OH = \frac{|4x+3y-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5} = R \quad (۰/۵) \quad -11$$

$$(۰/۲۵) \text{ معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 - \frac{1}{25} = 0$$

$$(۰/۵) \text{ معادله صغری دایره: } x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{124}{25} = 0$$

$$O_1 = (0, 0), R_1 = 1 \quad (۰/۵), \quad O_2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}\right), R_2 = \sqrt{\frac{12+12-20}{2}} = 1 \quad (۰/۵) \quad -12$$

$$O_1, O_2 = d = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{16}{4}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (۰/۵)$$

$$d = R_1 + R_2 \Rightarrow \text{دو دایره مماس خارجیه} \quad (۰/۲۵)$$

$$O = (1, 1) \quad (۰/۲۵), \quad m_{OA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{2-1} = 1 \quad (۰/۲۵) \quad -13$$

$$m_L = \frac{-1}{m_{OA}} = \frac{-1}{1} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \text{معادله خط L: } y-1 = -1(x-1) \quad (۰/۲۵)$$